TEORIJA GRAFOV IN LOGISTIKA

Maja Fošner in Tomaž Kramberger
Univerza v Mariboru
Fakulteta za logistiko
Mariborska cesta 2
3000 Celje
Slovenija
maja.fosner@uni-mb.si
tomaz.kramberger@uni-mb.si

Povzetek

V članku bodo predstavljeni osnovni pojmi in osnovne lastnosti matematičnega področja teorije grafov. Obravnavani bodo nekateri logistični problemi, ki jih lahko rešimo s pomočjo teorije grafov.

Ključne besede: graf, logistika

1 Uvod

Beseda logistika se danes pogosto pojavlja v medijih, bodisi v raklamnih oglasih ali pa v različnih strokovnih člankih. Kaj je logistika? Logistika je zelo široka raziskovalna veda, ki povezuje organizacijska, ekonomska, finančna informacijska, okoljevarstvena in še mnoga druga znanja v enoten sistem. Je panoga, ki obsega že pet odstotkov svetovne trgovine in postaja ena vodilnih znanstvenih ved. Logistiko bi lahko definirali kot dejavnost, ki se ukvarja z upravljanjem toka materialov od virov do porabnikov tako znotraj podjetij kot tudi med podjetji. Logistika zajema fizični pretok materiala in pretok informacij od dobavitelja, preko proizvajalca in trgovca vse do končnega potrošnika. Gre za prostorske spremembe, prav tako pa tudi za skladiščenje materiala. Cilj logistike je, da na pravem mestu ob pravem času zagotovimo prave dobrine in storitve, z najnižjimi stroški in vplivi na okolje, ki je v skladu s sklenjeno pogodbo. Logistika zajema vse procese v podjetju, in sicer: napovedovanje, povpraševanja, nabava, načrtovanje potreb, načrtovanje proizvodnje, materialno poslovanje, skladiščenje, manipuliranje z materiali, embaliranje, zaloge končnih izdelkov, načrtovanje distribucije, naročila, transport, prodajne storitve, ipd.

Pojmovanje logistike se je z razvojem elektronskega poslovanja, IT tehnologij in tehnologije nasploh močno spremenilo. Logistika v današnjem času ne pomeni več samo prevoza različnega tovora, njegovega skladiščenja in manipulacije z njim, temveč pomeni tudi celovito spremljanje in upravljanje s prenosom podatkov ter informacij. Tudi klasično pojmovanje logistike kot vede, ki se ukvarja s prenosom dobrin iz ene točke v drugo, se je v času tako imenovane globalizacije močno spremenenilo. Poti, ki jih mora blago opraviti je več in so daljše. Velik obseg poslovanja in veliko število logističnih operacij vse vpletene sili k boljšemu planiranju logističnih procesov in zniževanju stroškov.

Na tem mestu pa nastopi čas, da se v planiranje in obvladovanje stroškov vključi tudi matematika. Za vključevanje matematike v planiranje izvajanja logističnih procesov obstaja veliko različnih možnosti in orodij. Eno izmed njih je teorija grafov, kar bomo predstavili v sledečem poglavju.

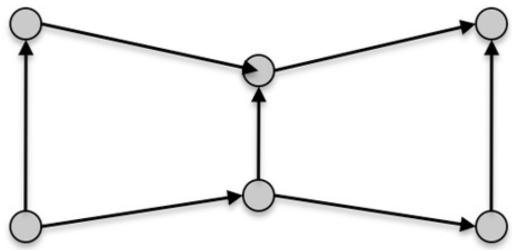
2 Teorija grafov

Teorija grafov je področje matematike, ki se ukvarja s preučevanjem lastnosti grafov. Graf je množica točk, imenovanih vozlišča, ki so med seboj povezane s povezavami. Te povezave so lahko usmerjene ali neusmerjene, odvisno od primera. Graf, v katerem so vse povezave usmerjene, se imenuje usmerjen graf. V primeru, ko so vse povezave v grafu neusmerjene, je graf neusmerjen. Povezave, ki se začnejo in končajo v istem vozlišču, imenujemo zanke. Vsaki povezavi lahko priredimo tudi določeno realno vrednost, kar pomeni, da graf razširimo z vpeljavo uteži. V primeru, da graf predstavlja mrežo cest, lahko uteži predstavljajo dolžino vsake ceste. Graf s povezavami, ki so utežene, je utežen graf.

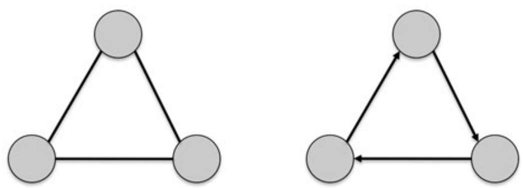
S strukturami, ki jih teorija grafov obravnava lahko ponazorimo (modeliramo) vrsto problemov iz realnega sveta na način, ki nam kasneje nudi še veliko možnosti za nadaljnje preučevanje. Že sam začetek teorije grafov izhaja iz praktičnega problema, danes bi mu rekli logističnega problema, ki ga je leta 1736 formuliral in rešil znan švicarski matematik Leonhard Euler. Nekaj let kasnje je Euler pod naslovom *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* objavil članek v reviji *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, v katerem je predstavil formulacijo in rešitev problema *Sedmih mostov Königsberga.* Ta članek, objavljen leta 1741, velja za prvi znanstven zapis kasneje razvite vede teorije grafov.

2.1 Osnovni pojmi

V tem razdelku bomo predstavili nekaj osnovnih pojmov s področja teorije grafov. V različni literaturi je mogoče zaslediti več različnih formalnih definicij grafov. Mi bomo graf G definirali kot neprazno množico elementov, ki jih imenujemo vozlišča (točke) grafa G in množico parov teh elementov, ki jih imenujemo povezave grafa. Množico vozlišč označimo z $V(G)$, množico povezav grafa pa označimo s simbolom $E(G)$. Če sta točki u in v vozlišči grafa G, potem sta uv ali vu povezavi, ki ju povezujeta. V primeru, ko lahko eno izmed vozlišč u ali v proglasimo za začetno drugo pa za končno vozlišče povezave, postane ta povezava usmerjena. Grafe z usmerjenimi povezavami imenujemo usmerjeni grafi ali digrafi (beseda digraf izhaja iz angleščine in sicer directed graph, digraph). Kot vidimo na sliki 1 in 2, lahko usmerjene povezave grafično ponazorimo s puščicami.

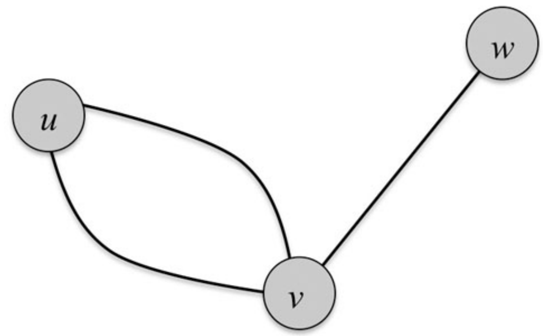


Slika 1: Usmerjen graf s šestimi vozlišči in sedmimi povezavami.



Slika 2: Neusmerjen in usmerjen graf.

Povezava, ki se začne in konča v istem vozlišču se imenuje zanka. Povezavi, ki imata isti obe krajišči sta vzporedni povezavi (glej sliko 3).

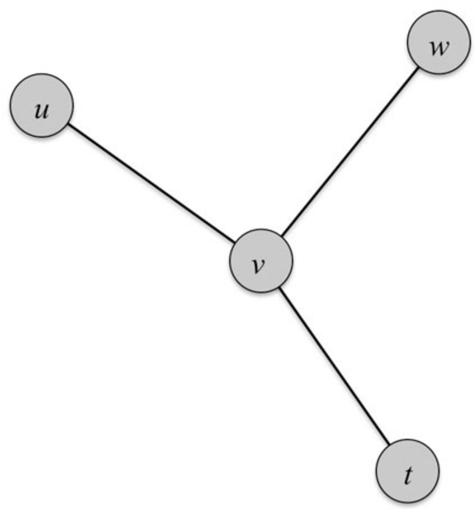


Slika 3: Vzporedni povezavi med vozliščema u in v.

Graf brez zank in vzporednih povezav imenujemo enostaven graf. Če povezava uv povezuje vozlišči u in v, pravimo, da sta ti vozlišči incidenčni omenjeni povezavi. Število povezav, katerim je določeno vozlišče incidenčno, imenujemo stopnja vozlišča. Na sliki 4 lahko vidimo, da je vozlišče v incidenčno povezavam vu, vt, vw. Stopnja vozlišča v je torej 3.

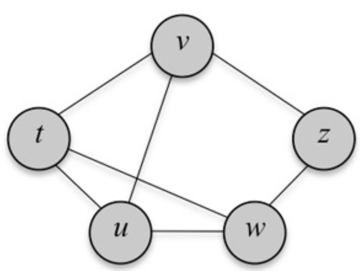
Vsota stopenj vseh točk v grafu je vedno enaka dvakratnemu številu povezav v grafu in je soda. Namreč, vsaka povezava k skupni vsoti stopenj vedno prispeva vrednost 2, saj ima vedno začetno in končno vozlišče.

Vozlišči u in v sta sosedni, če med njima obstaja povezava. V enostavnem grafu število sosednjih vozlišč izbranega vozlišča sovpada z njegovo stopnjo.



Slika 4: Vozlišče v, ki je incidenčno povezavam vu, vt, vw.

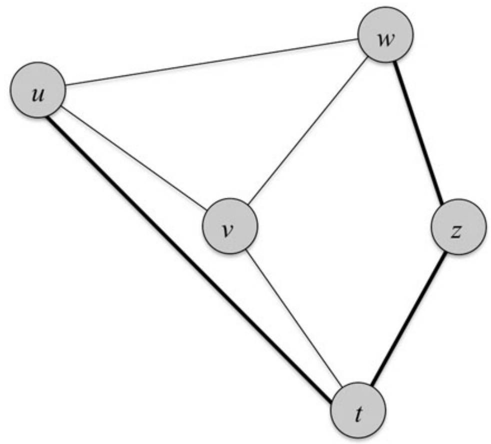
Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$ in naj bo G' graf z množico vozlišč $V(G')$ in množico povezav $E(G')$. Graf G' je podgraf grafa G, če je $V(G')$ podmnožica množice $V(G)$ in je $E(G')$ podmnožica množice $E(G)$. Graf G' je vpet podgraf grafa G , če je $V(G) = V(G')$. Slika 5 prikazuje na desni strani primer grafa, na levi strani pa primer njegovega podgrafa.



Slika 5: Primer grafa in njegovega podgrafa.

2.2 Sprehod in razdalja v grafu

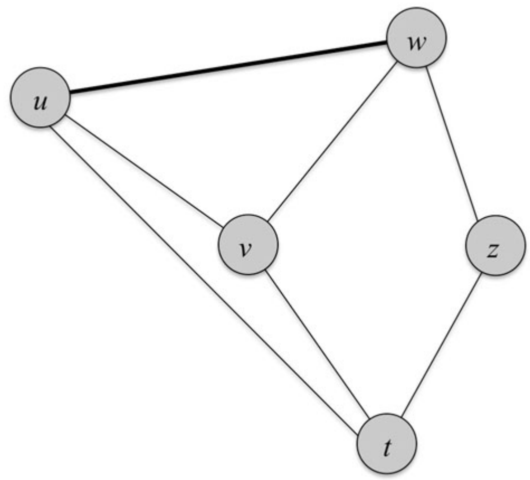
Zaporedje i povezav v_0v_1, v_1v_2, $\ldots$, $v_{i-1}v_i$ grafa G imenujemo sprehod od vozlišča v_0 do v_i z dolžino i v grafu G in ga označimo $v_0v_1v_1v_2\ldots v_{i-1}v_i$. Če so vse povezave sprehoda različne, potem sprehod imenujemo enostavni sprehod ali sled. Če pa so v enostavnem sprehodu različna še vsa vozlišča, potem sprehod imenujemo pot. Primer poti v grafu lahko vidite na sliki 6.



Slika 6: Sprehod $utzw$ je pot med vozliščema u in w.

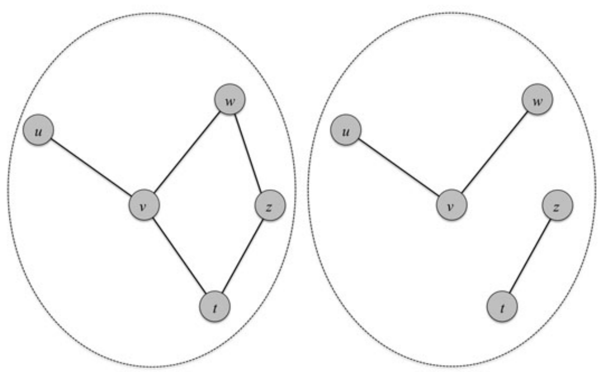
Sprehod v katerem sta začetni in končni vozlišči enaki, $v_0 = v_1$, imenujemo obhod. Obhod, v katerem so vse povezave različne imenujemo enostaven obhod. V primeru, ko enostavni obhod v grafu G prehodi vse povezave natanko enkrat, obhodu pravimo Eulerjev obhod.

Razdalja med točkama v_0 in v_i v grafu G je dolžina najkrajšega sprehoda med njima, običajno razdaljo označimo kot $d_G(v_0v_1)$.



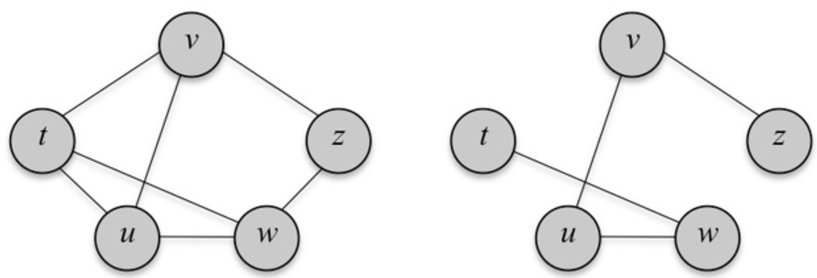
Slika 7: Razdalja med vozliščema u in v je dolžina najkrajše poti med njima.

V primeru, da med poljubnima točkama v_0 in v_i v grafu G ni nobenga sprehoda, potem pravimo, da je graf G nepovezan. Če med poljubnima vozliščema v_0 in v_i v grafu G obstaja sprehod, pa pravimo, da je graf G povezan. Na sliki 8 vidimo, da je graf na levi povezan, saj za poljuben par vozlišč med njima obstaja povezava. Za graf na desni strani slike 8 pa to ne velja.



Slika 8: Primer povezanega in nepovezanega grafa.

Povezan graf brez ciklov je drevo. Naj bo G povezan graf. Vpeto drevo v grafu G je podgraf grafa G, na katerem so vsa vozlišča in je drevo. Slika 9 na levi strani prikazuje primer grafa, na desni strani pa primer vpetega drevesa.



Slika 9: Primer grafa in njegovega vpetega drevesa.

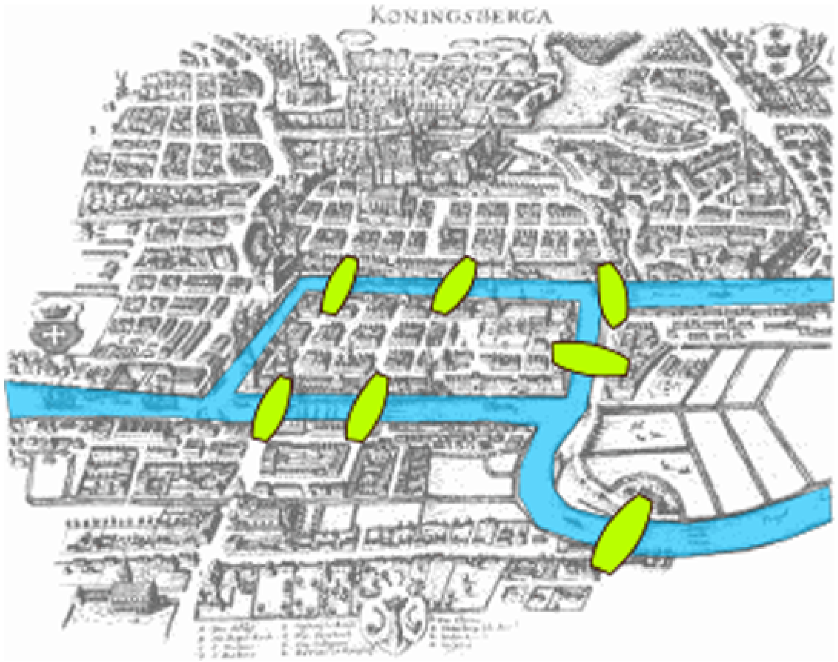
2.3 Problem sedmih mostov Königsberga

V nadaljevanju bomo predstavili problem *Sedmih mostov Königsberga*. Mesto Königsberg (sedaj se mesto imenuje Kaliningrad, administrativno spada pod Rusijo, vendar geografsko leži med Poljsko in Litvo) leži ob reki Pregel. Kot je videti na sliki 10 sta na reki v središču dva večja otoka, ki sta z bregovi in med seboj povezan s sedmimi mostovi. Problem, ki si ga je zastavil Euler se glasi:

Ali je mogoče prehoditi pot skozi vse dele mesta tako, da prečkamo vsak most natanko enkrat in se vrnemo na začetno mesto?

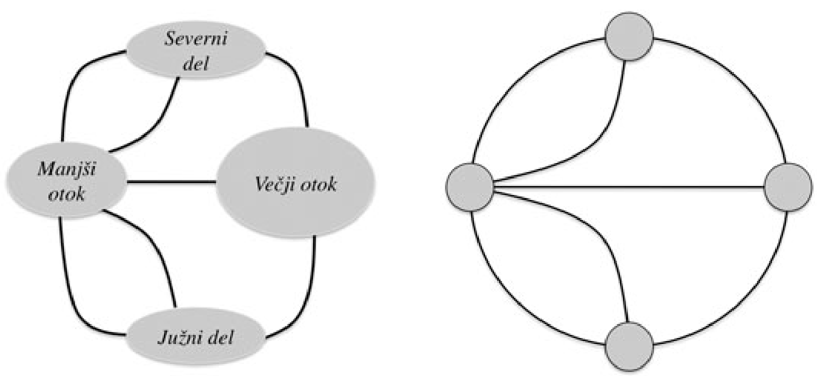
Euler je v članku pokazal, da obhoda mesta na želen način ni mogoče opraviti.

Postavi se vprašanje: Zakaj Eulerjev obhod? Enostavnemu obhodu, ki prehodi vsako povezavo natanko enkrat previmo Eulerjev obhod, saj je ravno Eulerjev obhod rešitev Eulerjevega problema sedmih Königsberških mostov. Na sliki 11 si oglejmo, kako je v tistem času Königsberg izgledal. Kot vidimo je štiri dele mesta, severni del in južni del ter oba otoka, povezovalo sedem mostov. Manjši otok je bil z južnim in s severnim delom povezan s po dvema mostvoma, večji otok pa je bil z obema deloma mesta povezan samo s po enim mostom. Otoka med seboj je prav tako povezoval en most.



Slika 10: Štirje deli mesta in sedem Königsberških mostov.

Euler je pri preučevanju problema prišel do genialne zamisli, da bi posamezne dele mesta označil s točkami (vozlišči), mostove pa kot povezave med njimi. Tako je narisal graf s štirimi vozlišči in sedmimi povezavami, ki ga vidimo na sliki 11.



Slika 11: Model Königsberga in njegovih mostov predstvljen v jeziku teorije grafov.

Tako je Königsberg in njegove mostove modeliral s pomočjo teorije grafov (tega on takrat še ni vedel). V grafu, ki ga je dobil, lahko sedaj poiščemo tako imenovan Eulerjev obhod. To z drugimi besedami pomeni, da prehodimo vsako povezavo natanko enkrat in se vrnemo v izhodišče. Euler je z natančnim preučevanjem problema ugotovil, da tako zastavljen problim nima rešitve. Za razliko od njega, pa mi danes, nekaj stoletij kasneje vemo, da je Eulerjev obhod mogoče poiskati le v grafu v katerem so vsa vozlišča sode stopnje. Grafom, ki imajo vsa vozlišča sode stopnje zato rečemo Eulerjevi grafi.

3 Zaključek

Že na začetku smo omenili, da je teorija grafov zelo primerno orodje za reševanje logističnih problemov. Zapišimo nekaj primerov, ki jih teorija grafov reši in so primerni za modeliranje nekaterih logističnih problemov, ki se pojavljajo v realnem svetu:

Problem Kitajskega poštarja obravnava primer, ko želimo v usmejenem ali neusmerjenem grafu poiskati obhod tako, da vsako povezavo v grafu prehodimo vsaj enkrat in največ dvakrat ter to naredimo po najkrajši poti. Za lažje razumevanje si lahko predstavljamo poštarja, ki se sprehaja po ulicah (v našem primeru je to graf) in želi v najkrajšem času dostaviti pošto do vsake hiše (na danem grafu so točke hiše) ter se nato vrniti nazaj na glavno pošto (torej v začetno izhodiščno točko). Poštar želi prihraniti nepotreben čas, napor in denar ter opraviti svoje delo na čim krajši relaciji.

Problem trgovskega potnika je na prvi pogled podoben kitajskemu problemu poštarja. Obravnava primer, ko želimo v usmejenem ali neusmerjenem grafu, kjer poznamo vrednost povezav, poiskati obhod tako, da vsako vozlišče grafa obiščemo vsaj enkrat in to naredimo po najkrajši poti. Torej, trgovski potnik mora prehoditi vsa vozlišča tako, da bo pri tem prehodil čim krajšo pot (da bo vsota vrednost uporabljenih povezav čim manjša) in se vrniti v izhodišče.

Problem minimalnega vpetega drevesa obravnava primer, ki ga lahko predstavimo z uteženim grafom, kjer so vozlišča lokacije ali mesta, povezave z utežmi pa so ceste z danimi stroški. Poiskati moramo povezan podgraf z najmanjšo skupno utežjo, na katerem so vsa vozlišča grafa. Za določanje minimalnega vpetega drevesa poznamo tri algoritme: Kruskalov algoritem, Primov algoritem in Dijkstrov algoritem.

Iskanje najkrajših poti pride v poštev, kadar želimo v nekem uteženem grafu poiskati razdaljo ali najkrajšo pot med dvema vozliščema.

Našteti problemi v veliko primerih zelo dobro ponazarjajo probleme iz realnega sveta. Rešitve problemov iz teorije grafov nam z veliko verjetnostjo napovedo tudi rešitve logističnih problemov iz realnega sveta. Na primer:

- Poti vozil za pluženje in posipavanje cest se lahko modelirajo s pomočjo teorije grafov. V ta namen ponavdi uporabimo eno izmed variant problema kitajskega poštarja.
- Problem gradnje kabelskega omrežja med mesti, električne napeljave, vodovodne napeljave itd. lahko obravnavamo z iskanjem minimalnega vpetega drevesa.
- Poti in vrstni red razvozov blaga iz skladišča v več prodajaln se lahko modelirajo s problemom trgovskega potnika.
- Načrtovanje terase telefonskega kabla, ki povezuje več različnih objektov med seboj modeliramo s problemom iskanja najmanjšega vpetega drevesa.

- Iskanje najkrajših poti pa tako ali tako srečuejmo že v vsakdanjem svetu. Priljubljene napravice GPS, ki jih videvamo v avtomobilih in na motornih kolesih uporabljajo metodo iskanja najkrajših poti za določanje poti do izbranega mesta na karti.

Dobljene rešitve so ljudem, ki odločajo o reševanju logističnih problemov v veliko pomoč. Dejansko v večini primerov pridobivanje relevantnih podatkov za odločanje brez uporabe takšnih metod sploh ni več mogoče.

Literatura

[1] Eiselt, H. A., Gendreau, M., Laporte, G., Arc routing problem I: The Chisenese postman problem, Operations Research 43(2), (1995) 231-242.

[2] Kramberger, T., Žerovnik, J., Priority constrained Chinese postman problem: Logistics and Sustainable Transport, 1(1), (2007) 15str.

[3] Wilson, J. R., Watkins, J. J., Uvod v teorijo grafov, DMFA, Slovenija, (1997).

[4] Guan, M., Graphic Programming using odd and even points, Chinese Mathematics 1, (1962) 273-277.

[5] Korte, B., Vygen J., Combinatorial optimization: Theory and algorithms, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, (2002).